ADT Graph und ADT Baum

- Graphen: Allgemeines
- Eulersche Graphen
- Hamiltonsche Graphen
- Graph- und Subgraphisomorphismus
- Planare Graphen
- Färben von Graphen
- Matchings von Graphen
- B¨aume und W¨alder
- Allgemeiner Baum

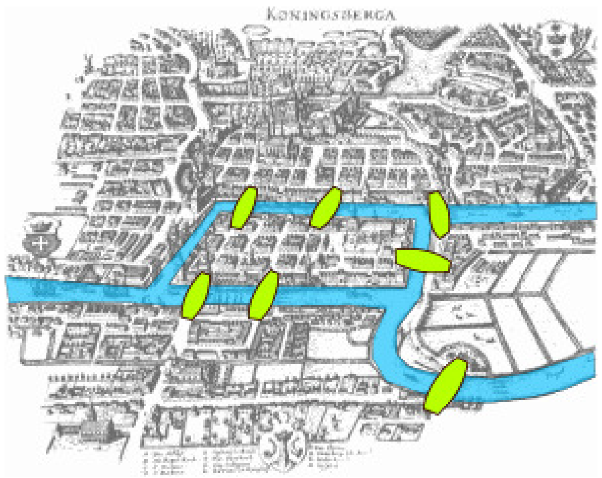
Graphen: Allgemeines (1)

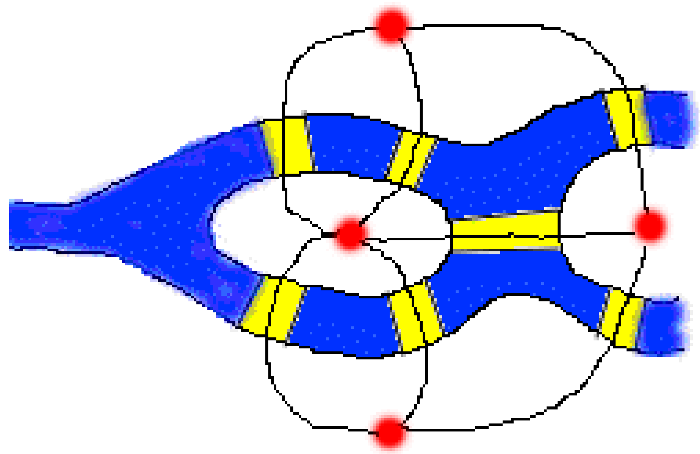
Ein Graph ist in der Graphentheorie eine abstrakte Struktur, die eine Menge von Objekten zusammen mit den zwischen diesen Objekten bestehenden Verbindungen repräsentiert. Die mathematischen Abstraktionen der Objekte werden dabei Knoten (auch Ecken) des Graphen genannt. Die paarweisen Verbindungen zwischen Knoten heißen Kanten (manchmal auch Bögen). Die Kanten können gerichtet oder ungerichtet sein. Häufig werden Graphen anschaulich gezeichnet, indem die Knoten durch Punkte und die Kanten durch Linien dargestellt werden.

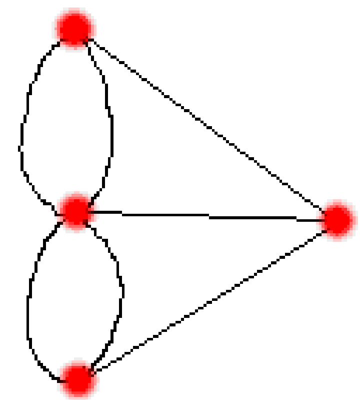
Graphen: Allgemeines (1)

Graphen gehen auf den Mathematiker Leonhard Euler zurück, der im 18. Jahrhundert versuchte, das Königsberger Brückenproblem zu lösen.

> Gibt es in der Stadt Königsberg einen Rundweg, bei dem man alle sieben Brücken der Stadt über den Pregel genau einmal überquert und wieder zum Ausgangspunkt gelangt?







Euler bewies, dass es keinen solchen Rundweg geben kann.

Kein klassisches geometrisches Problem, sondern ein topologisches Problem, da es nicht auf die genaue Lage der Brücken ankommt, sondern nur darauf, welche Brücke welche Inseln miteinander verbindet.

Graphen: Allgemeines (2)

Definition: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel (V, E), wobei V eine endliche nichtleere Menge von Knoten ist. Die Menge $E = \{(x, y) \mid x, y \in V\}$ spezifiziert die Kanten zwischen Knoten. Es gilt: $(x, y) := (y, x)$.

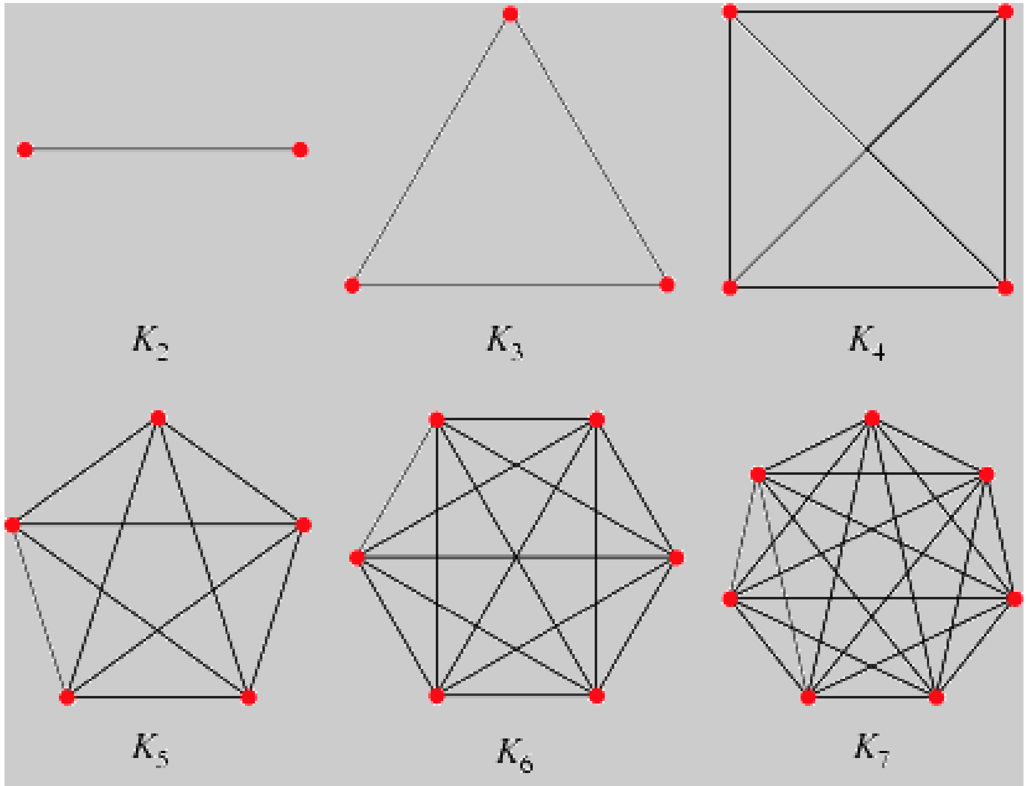
Beispiel: Repräsentation eines Straßennetzes
Die Knoten entsprechen den Ortschaften. Zwei Orte sind durch eine Kante verbunden, wenn es eine Straße gibt, die diese beiden Orte auf direktem Wege verbindet.
Wichtiges Problem: den kürzesten Weg zwischen zwei Orten A und B bestimmen.

Beispiel: Modellierung von Bekanntschaften
Die Knoten entsprechen den Personen. Zwei Personen sind durch eine Kante verbunden, wenn sie sich kennen. Hier wird angenommen, dass die Relation "kennen" symmetrisch ist.

Graphen: Allgemeines (3)

Definition: Der Grad $\deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist die Anzahl von Knoten, die durch eine Kante mit v verbunden sind.

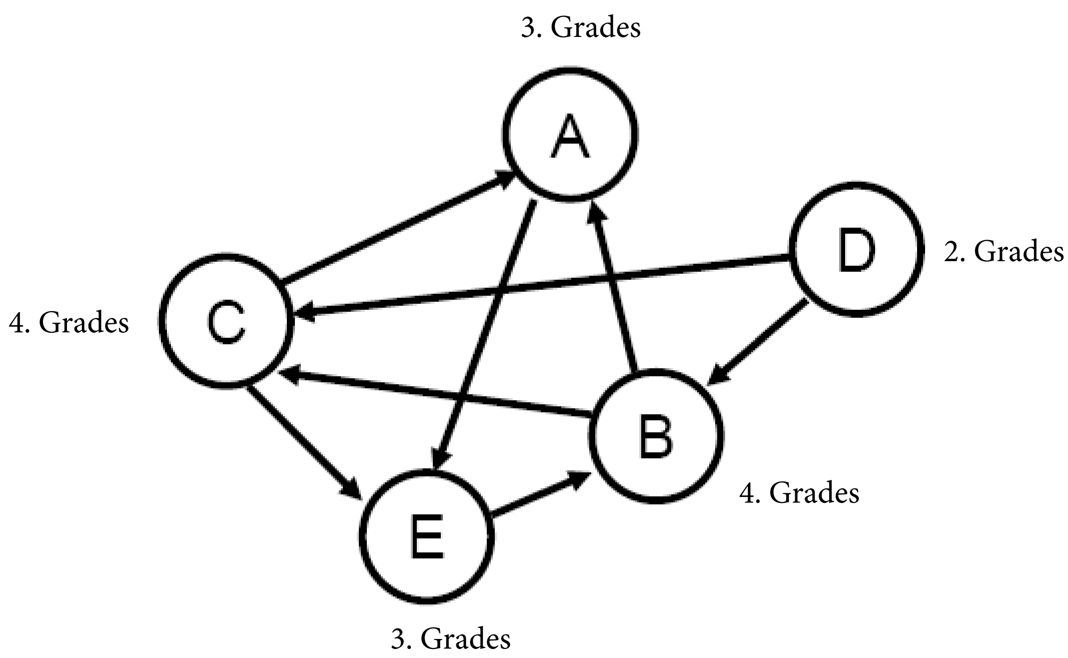
Beispiel: Ein vollständiger Graph K_n besteht aus n Knoten, die alle paarweise miteinander verbunden sind.



In K_n haben alle Knoten v den Grad $\deg(v) = n - 1$.

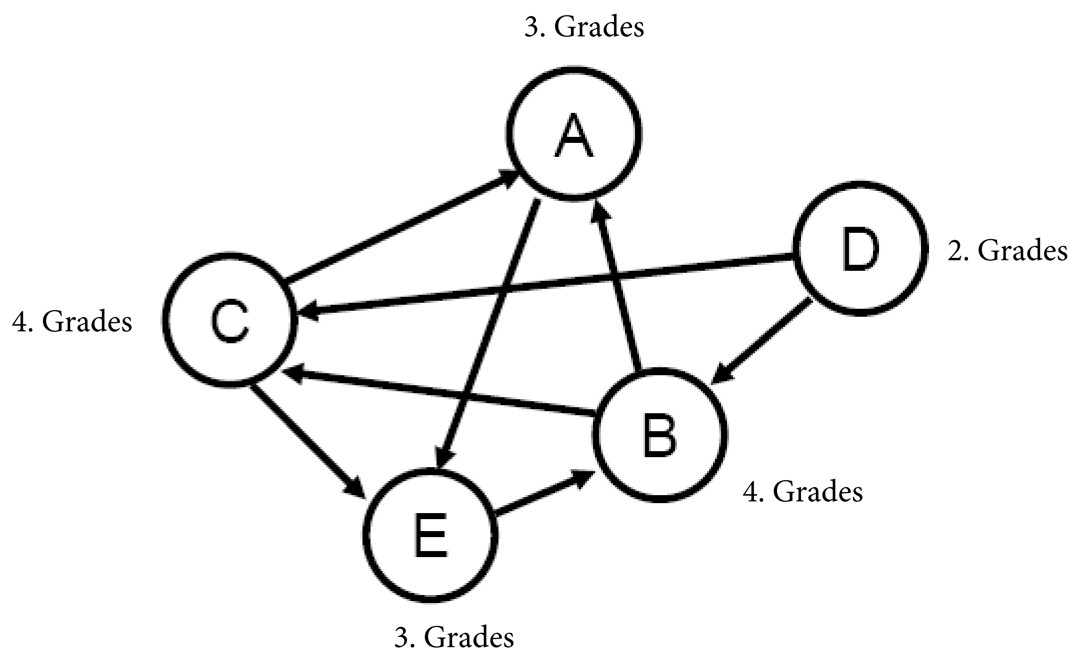
Graphen: Allgemeines (4)

Theorem: Für jeden Graphen gibt es mindestens zwei Knoten mit demselben Grad.



Graphen: Allgemeines (5)

Theorem: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt: Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.



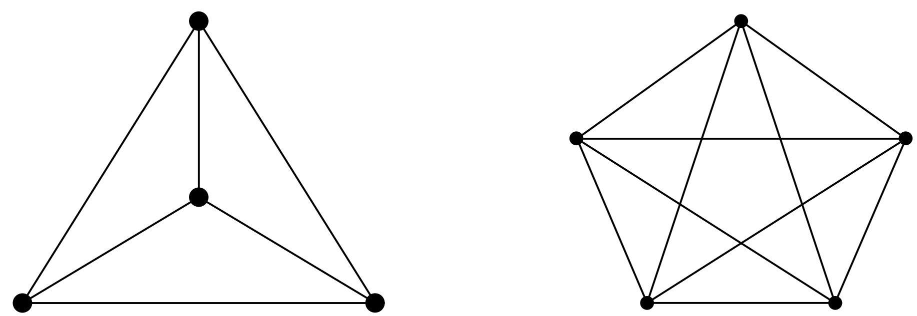
In diesem Beispiel gibt es 2 (also geradzahlig) Knoten ungeraden Grades.

Graphen: Allgemeines (6)

Definition: Ein Graph $G = (V,E)$ heißt zusammenhängend, wenn jeder Knoten u mit jedem Knoten v über eine Kette von Kanten miteinander verbunden ist.

Nicht zusammenhängende Graphen enthalten zumindest zusammenhängende Teile.

Beispiel: Der Graph besteht aus genau zwei Komponenten



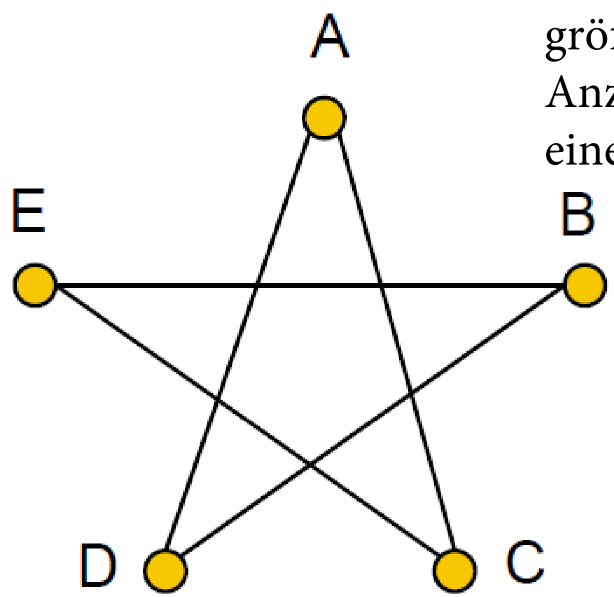
Graphen: Allgemeines (7)

Korollar: Für jeden zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$|E| \;\geq\; |V| - 1$$

Beweis: Da ein zusammenhängender Graph aus genau einer Komponente besteht, folgt aus dem letzten Satz, dass $|V| - |E| \leq 1$ gelten muss.

Die Anzahl der Kanten ist größer oder gleich der Anzahl der Knoten, um einen vermindert.



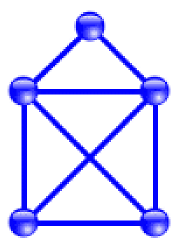
$6 \geq 5 - 1$

Eulersche Graphen (1)

Definition: Eine Eulertour in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Weg, der jede Kante genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind. Enthält ein Graph eine Eulertour, so nennt man ihn eulersch.

Ist G eulersch, so ist der Grad $\deg(v)$ aller Knoten $v \in V$ gerade, denn aus jedem Knoten geht man genauso oft "hinein" und "hinaus". Es gilt sogar die Umkehrung.

Theorem: **(Euler)** Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.



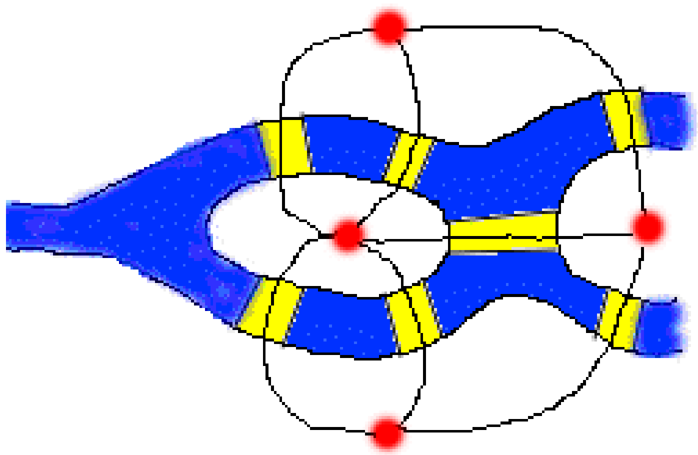
Es gibt 44 Lösungen ;-)

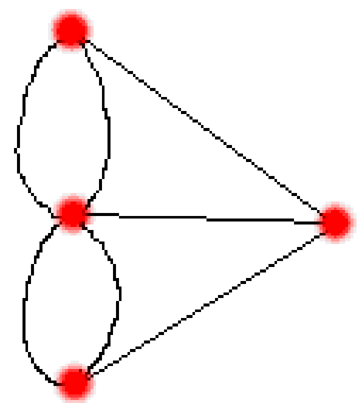
Eulertour

Eulersche Graphen (4)

Beispiel: Das Königsberger Brückenproblem hat keine Lösung

Königsberger Brückenproblem: Kann man einenSpaziergang durch Königsberg machen und dabeiüber jede Brücke genau einmal gehen und nachdem Spaziergang wieder zum Ausgangspunktzurückkehren?





Achtung: Hier sind Multikanten zwischen zwei Knoten zugelassen

Quiz: Wie viele Brücken müssten mindestens nachgebaut werden (und wo), damit eine Eulertour möglich ist?

Lösung

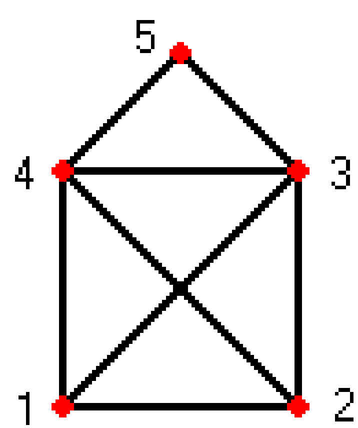
Eulersche Graphen (5)

Definition: Ein Eulerweg ist dann gegeben, wenn die Identität von Start- und Endknoten nicht verlangt wird, d.h. statt eines Zyklus wird lediglich ein Weg verlangt, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält.

Theorem: **(Euler)** Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ hat genau dann eine offene Eulertour, wenn der Grad aller Knoten bis auf zwei gerade ist. Die beiden Knoten mit ungeradem Grad dienen als Start- und Endknoten der offenen Eulertour.

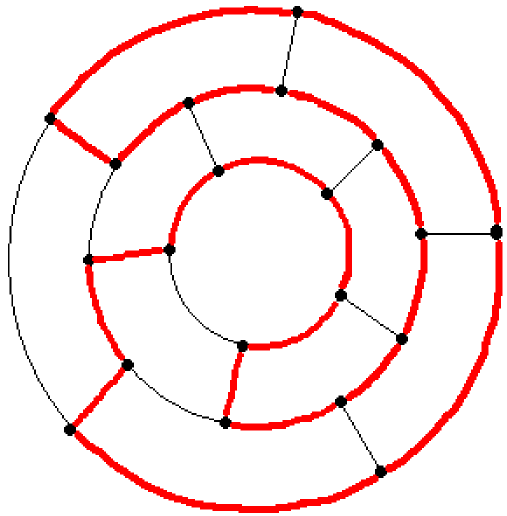
Beispiel: Das Königsberger Brückenproblem hat auch keine offene Eulertour.

Beispiel: “Haus vom Nikolaus”
Kann man diese Figur zeichnen, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu ziehen? Wenn ja, gibt es dafür einen Eulerweg.



Hamiltonsche Graphen (1)

Definition: Ein Hamiltonkreis in einem Graphen G = (V,E) ist ein Kreis (Startknoten = Endknoten), der alle Knoten von V genau einmal durchläuft. Enthält ein Graph einen Hamiltonkreis, so nennt man ihn hamiltonsch.



Sir William Rowan Hamilton
(1805–1865)

Hamilton was ein irisches Universalgenie: In seiner Jugend entwickelte er den Ehrgeiz, genau so viele Sprachen zu sprechen wie er Jahre alt war (dies hat er angeblich bis zu seinem 17. Lebensjahr durchgehalten). Schon vor Beendigung seines Studiums wurde er zum Königlichen Irischen Astronomen ernannt. Die nach ihm benannten Kreise untersuchte er im Zusammenhang mit einem von ihm entwickelten Geschicklichkeitsspiel.

Hamiltonsche Graphen (2)

Hamiltonsche Graphen werden zur Modellierung vieler praktischer Probleme verwendet

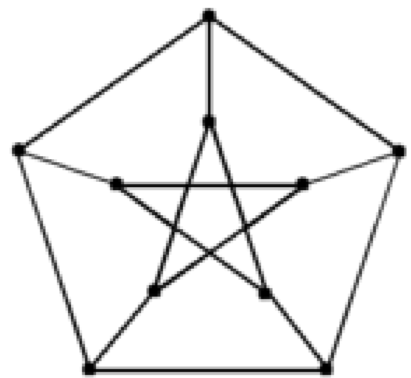
Beispiel: Problem des Handlungsreisenden
Ein Handlungsreisender möchte eine Reihe von Städten besuchen, die untereinander durch Straßen verbunden sind. Es gibt genau dann eine Rundreise, bei der keine Stadt mehrfach besucht wird, wenn das Straßennetz hamiltonsch ist.

Realistischere Variante: Man versieht die Kanten des Graphen mit Kosten (Entfernung, Fahrtkosten, etc.) und sucht nach einem Hamiltonkreis, der die Gesamtkosten minimiert.

Hamiltonsche Graphen (3)

Beispiel: Alle vollständigen Graphen K_n sind hamiltonsch

Beispiel: Der Petersen-Graph enthält keinen Hamiltonkreis



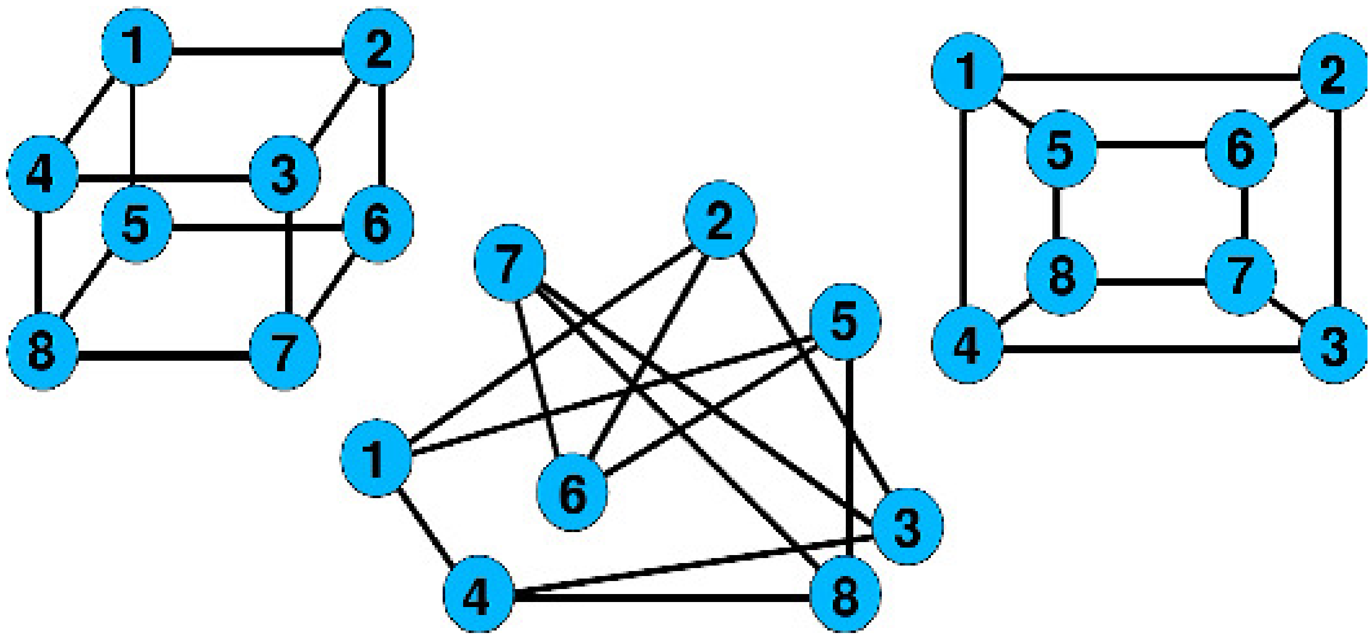
Theorem: (R. Karp, 1972) Das Entscheidungsproblem "Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, enthält G einen Hamiltonkreis?" ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Man kann wohl keinen Algorithmus finden, der entscheidet, ob ein Graph hamiltontsch ist und dessen Laufzeit polynomiell in der Größe des Graphen (also in der Anzahl Knoten und Kanten) ist.

Graphisomorphismus (1)

Intuitiv: Zwei Graphen mit der gleichen Knotenzahl, die gleichartig verbunden sind, sind isomorph.

Beispiel: Erkennung von Isomorphismen ist nicht immer einfach

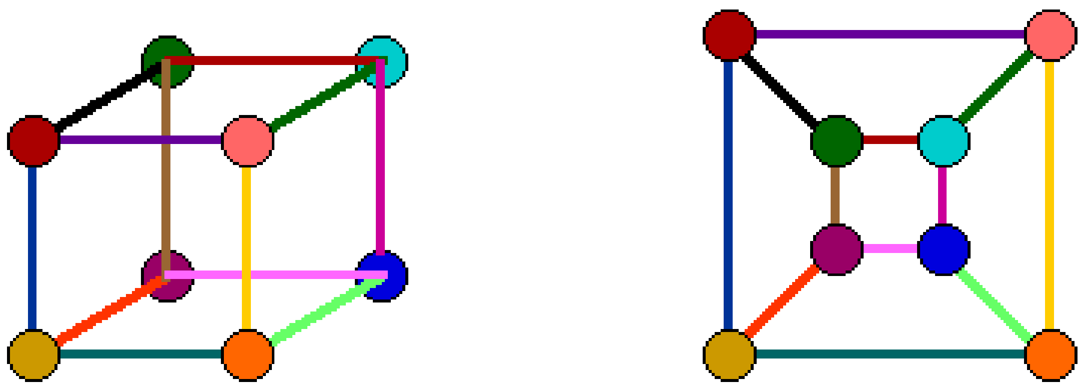


Planare Graphen (1)

Formal ist ein Graph durch (V, E) vollständig beschrieben. Anschaulich erst dann, wenn ein Graph gezeichnet wird. Übersichtliche Zeichnung: Anzahl der Schnittpunkte von Kanten möglichst gering halten. Besonders übersichtlich wird die Zechnung, wenn solche Überkreuzungen total vermieden werden.

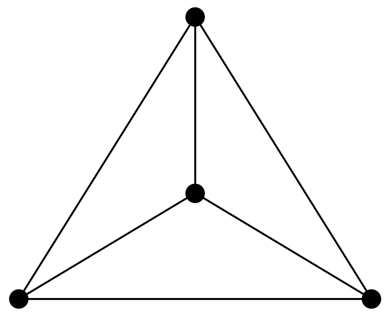
Definition: Ein Graph heißt planar, wenn man ihn so zeichnen (man sagt auch: in die Ebene einbetten) kann, dass sich keine Kanten kreuzen. Ein ebener Graph ist ein planarer Graph zusammen mit seiner Darstellung in der Ebene.

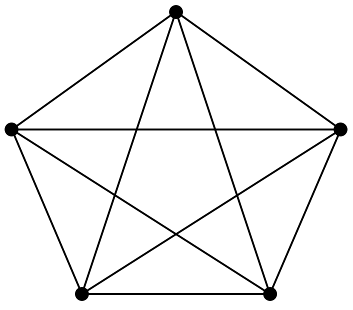
Beispiel: Ein planarer Graph (links) mit seiner Einbettung (rechts)



Planare Graphen (2)

Beispiel: Vollständiger Graph K_4 (links) ist planar. K_5 (rechts) nicht planar: Sämtliche Versuche, ihn planar darzustellen, schlagen spätestens an der letzten Kante fehl.



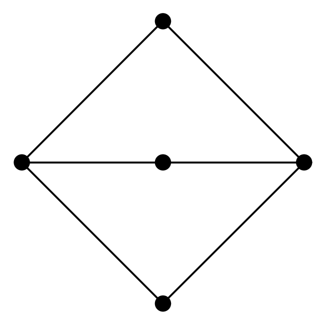


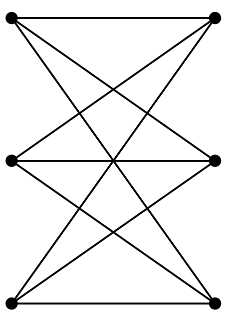
Planare Graphen (3)

Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ ist bipartit, wenn die Knotenmenge V in zwei Mengen A und B partitioniert werden kann, so dass alle Kanten einen Knoten aus A mit einem Knoten aus B verbinden.

Definition: Ein vollständiger bipartiter Graph $K_{m,n}$ besteht aus zwei Mengen A und B mit m bzw. n Knoten, wobei jeder Knoten aus A mit jedem Knoten aus B durch eine Kante verbunden ist.

Beispiel: $K_{2,n}$, n beliebig, ist planar (links $K_{2,3}$). $K_{3,3}$ (rechts) nicht planar.



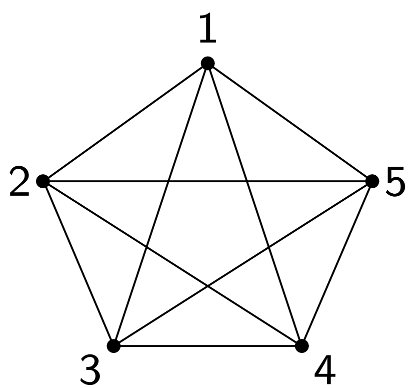


Färben von Graphen (1)

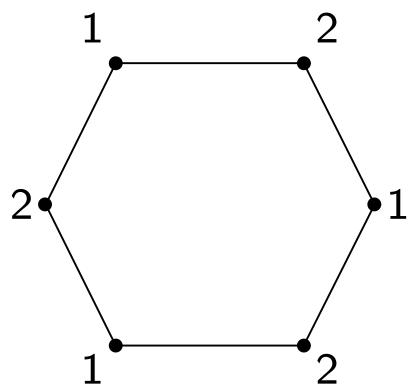
Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.

Beispiel: Der vollständige Graph K_n hat chromatische Zahl n. Kreise C_n gerader Länge n haben chromatische Zahl 2, Kreise C_n ungerader Länge n haben chromatische Zahl 3.

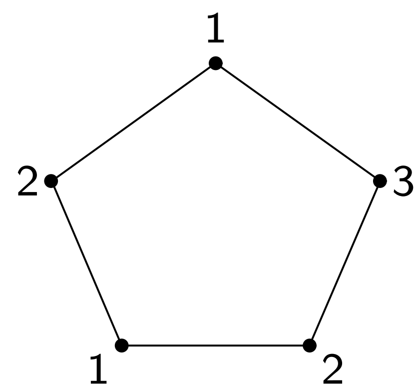
Theorem: Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn die chromatische Zahl 2 ist.



K_5

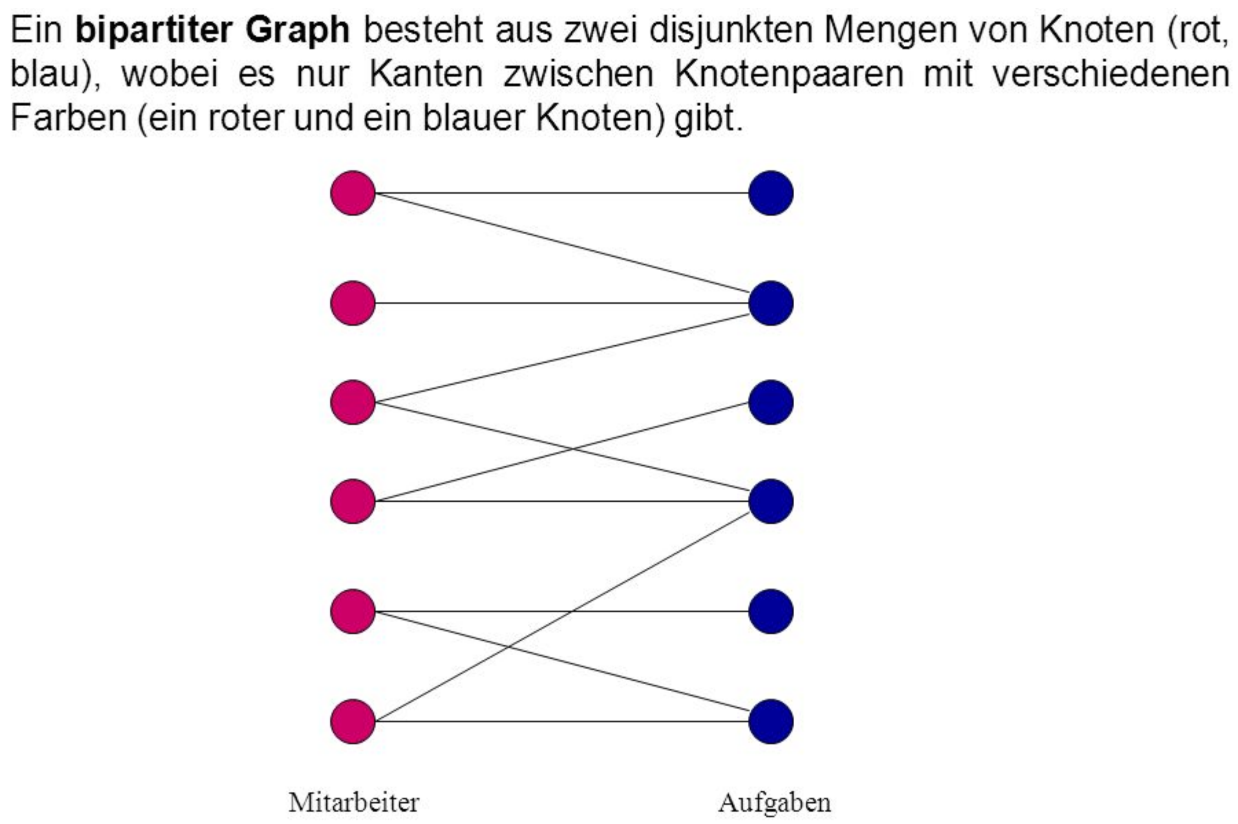


C_6



C_5

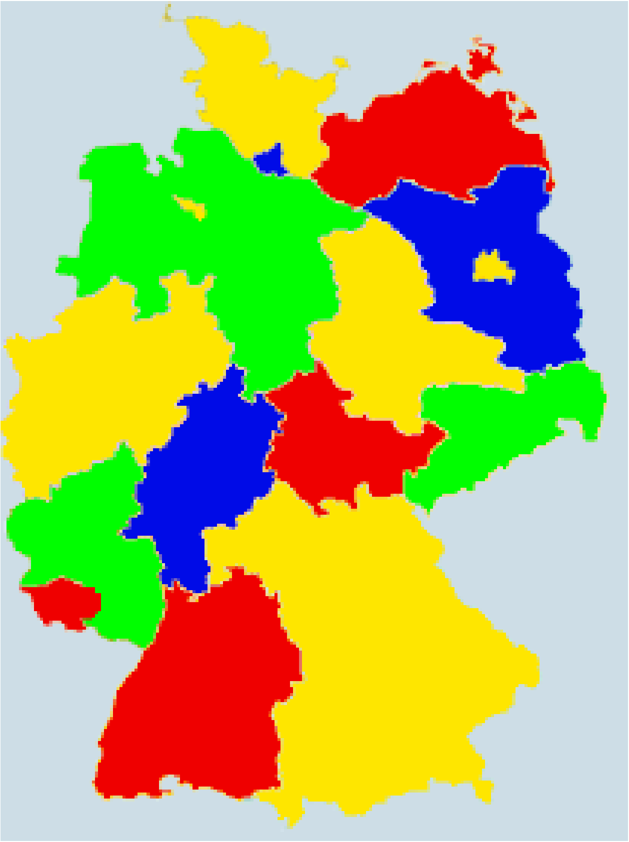
Färben von Graphen (2)



Färben von Graphen (3)

Anwendungen von Knotenfärbung:

- Färben von politischen Landschaften: benachbarte Länder bekommen unterschiedliche Farben



- Visualisierung von Segmentierungsergebnissen in der Bildverarbeitung

Färben von Graphen (4)

Theorem: **(Vierfarbensatz)** Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$.

- Ken Appel und Wolfgang Haken fanden 1977 einen Beweis mit Hilfe des Computers. Der Beweis reduzierte die Anzahl der problematischen Fälle von Unendlich auf 1.936 (eine spätere Version sogar 1.476), die durch einen Computer einzeln geprüft wurden.
- 1996 konnten Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas einen modifizierten Beweis finden, der die Fälle auf 633 reduzierte. Auch diese mussten per Computer geprüft werden.

Der Vierfarbensatz war das erste große mathematische Problem, das mit Hilfe von Computern gelöst wurde. Deshalb wurde der Beweis von einigen Mathematikern nicht anerkannt, da er nicht direkt durch einen Menschen nachvollzogen werden kann. Schließlich muss man sich auf die Korrektheit des Compilers und der Hardware verlassen. Auch die mathematische Eleganz des Beweises wurde kritisiert ("Ein guter Beweis liest sich wie ein Gedicht – dieser sieht aus wie ein Telefonbuch!").

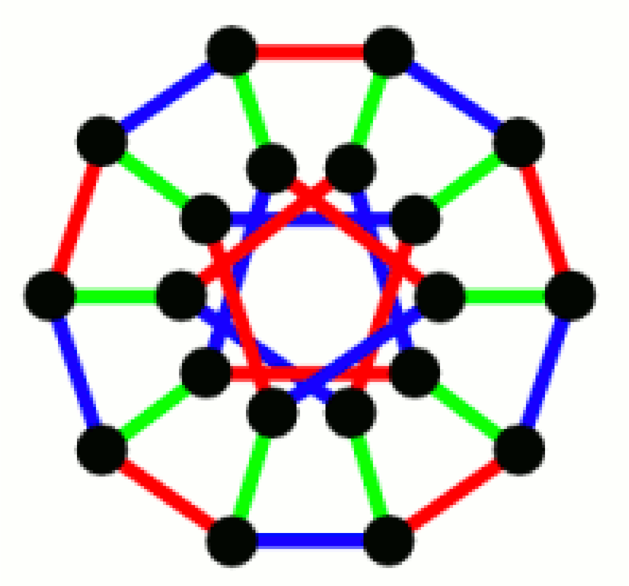
Färben von Graphen (5)

Im Allgemeinen ist das Färben von Graphen ein schwieriges Problem. Schon die scheinbar einfache Frage "Gegeben sei in Graph $G = (V,E)$, gilt $\chi(G) \leq 3$?" ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Greedy-Algorithmus: Wir besuchen die Knoten des Graphen in einer beliebigen Reihenfolge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und ordnen dem aktuellen Knoten jeweils die kleinste Farbe zu, die noch nicht für einen benachbarten, bereits besuchten Knoten verwendet wird.

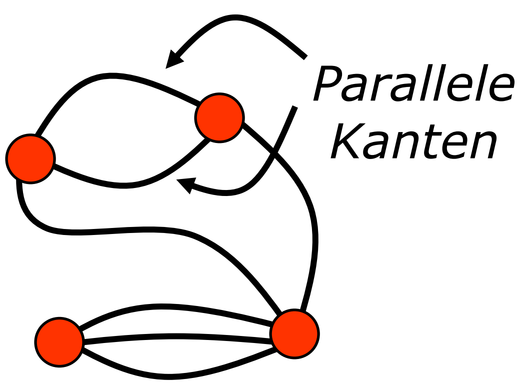
Färben von Graphen (6)

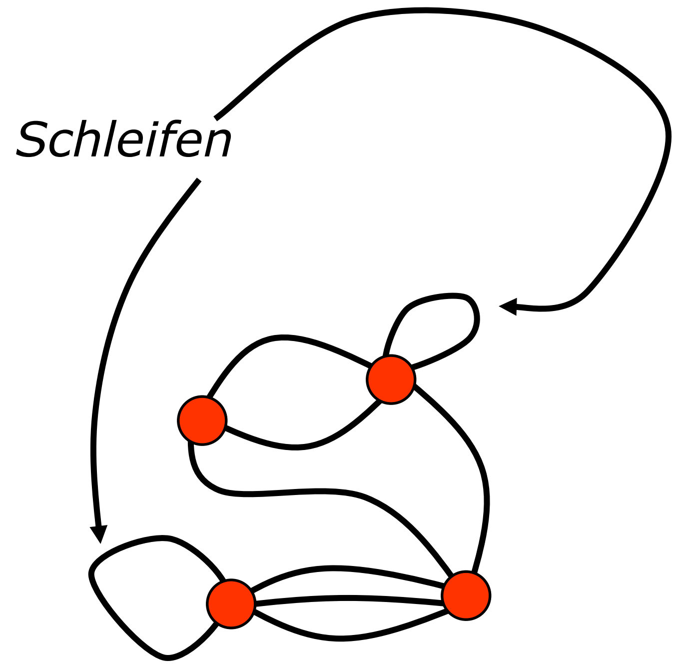
Beispiel: Desargues-Graph: 3-regulärer Graph (alle Knoten mit Grad 3) mit 20 Knoten und 30 Kanten



Matchings von Graphen (1)

Graphen dürfen in manchen Fällen auch Mehrfachkanten und Schleifen haben.

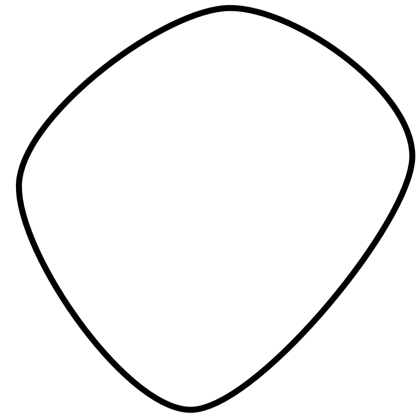




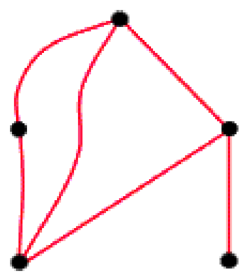
Matchings von Graphen (2)

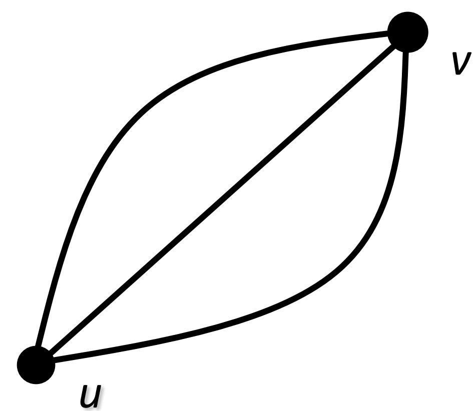
Definition:

Eine Schleife (oder Schlinge) ist eine Kante der Form $\{u, u\}$.



Ein Graph, der Mehrfachkanten enthält, heißt auch Multigraph.





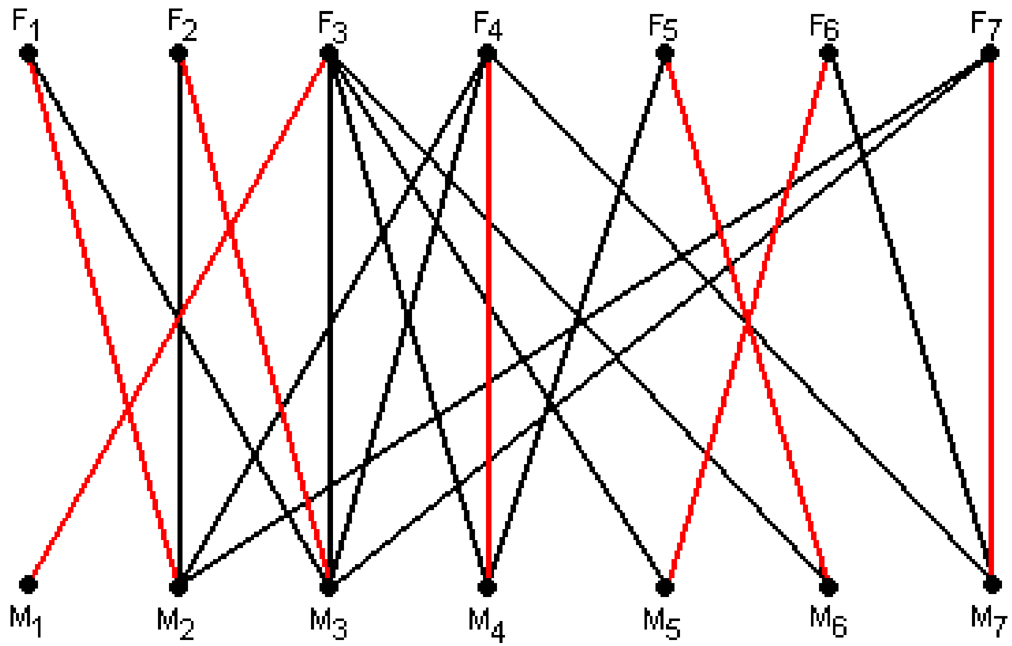
Ein Graph heißt einfach, falls er keine Schlingen oder Mehrfachkanten enthält.

Matchings von Graphen (1)

Beispiel: Heiratsproblem

Es gibt sieben heiratswillige Frauen und auch sieben Männer, die als Ehepartner in Erwägung kommen. Jede Frau stellte eine Liste von potentiellen Ehepartnern zusammen und man stellte sich die Frage, ob alle Frauen verheiraten können, ohne Bigamie zu betreiben. Die potentiellen Ehepartner sind in Tabellenform angegeben. Rechts: Der Graph für dieses Problem mit der rot markierten Lösung.

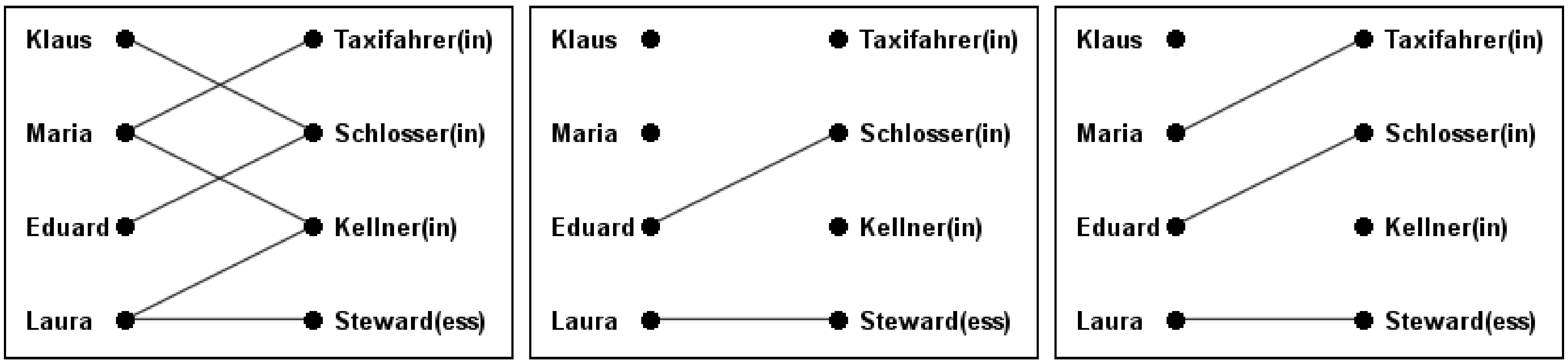
F_1	M_2, M_3
F_2	M_2, M_3
F_3	M_1, M_3, M_4, M_5, M_6
F_4	M_2, M_3, M_4, M_7
F_5	M_4, M_6
F_6	M_5, M_7
F_7	M_2, M_3, M_7



Matchings von Graphen (2)

Beispiel: Stellenvermittlung beim Arbeitsamt

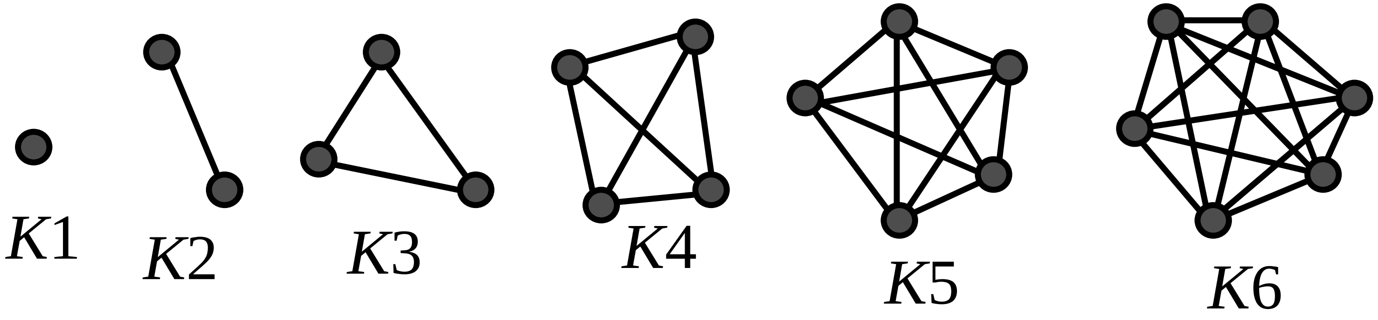
Dem Arbeitsamt liegen vier Stellenangebote und ebenso viele Stellengesuche vor. Bipartiter Graph (links): Jeder Knoten in der linken Teilmenge steht für einen Arbeitssuchenden und jeder in der rechten für eine offene Stelle. Eine Kante zwischen einem Arbeitssuchenden und einem Stellenangebot bedeutet, dass er für den entsprechenden Beruf qualifiziert ist.



Mitte: Matching. Rechts: Grösstes Matching.

Graphen -Grundlagen (2)

- Vollständige Graphen



  – Für die Anzahl der Kanten in einem vollständigen Graphen mit n Knoten (und damit für die maximale Anzahl von Kanten in einem einfachen Graphen) gilt:

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Präsentation eines Graphen als Matrix (1)

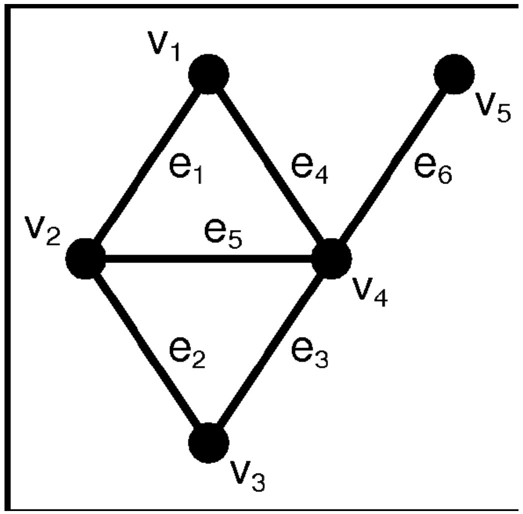
- Wenn $G = (V,E)$ ist, dann
  - heißen u und v adjazent, wenn $\{u,v\} \in E$,
  - heißen u und v Endknoten der Kante $\{u,v\} \in E$,
  - heißen $u \in V$ und $e \in E$ inzident, wenn u Endknoten der Kante e ist,
  - ist $u \in V$ erreichbar von $v \in V$, falls es einen Pfad P mit Anfangsknoten v und Endknoten u gibt.

Adjazenz liegt dann vor, wenn zwei Knoten über eine Kante miteinander verbunden sind. Somit bezeichnet Adjazenz die Beziehungen zwischen gleichartigen Elementen eines Graphen. Ebenso ist Adjazenz bei in einem Knoten endenden Kanten gegeben.

Inzidenz ist die Eigenschaft, gemeinsame Punkte zu besitzen, sie ist die Beziehung zwischen einer Geraden und einem auf ihr liegenden Punkt.

Präsentation eines Graphen als Matrix (2)

Darstellung von Graphen



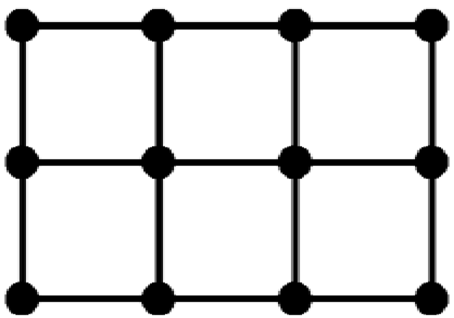
Ajazenzmatrix

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

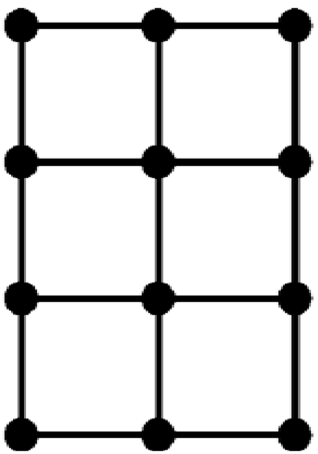
Gittergraph

Ein Gittergraph besteht aus einem Gitter mit m Zeilen und n Spalten.

$M_{1,2}$



$M_{3,4}$

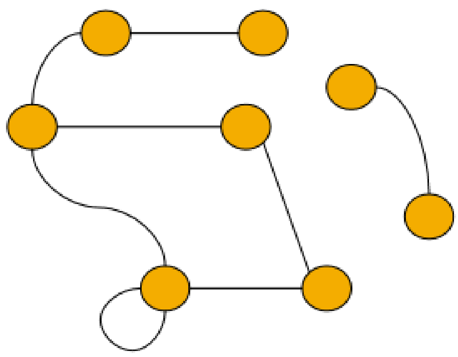


$M_{4,3}$

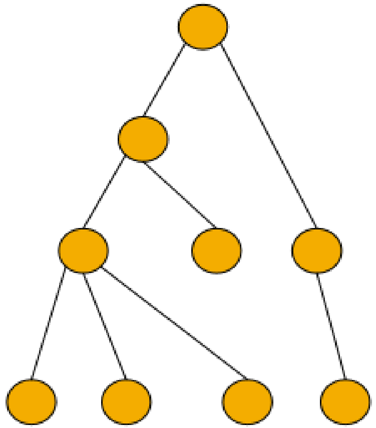
Allgemeiner Baum

Ein Baum stellt einen **speziellen Fall** des Graphen dar.

- Ein Baum ist ein Graph, in dem **zusätzliche Bedingungen** gegeben sein müssen (Analog: Jedes Rechteck ist ein Vieleck).
- Dadurch vereinfachen sich Struktur und Operationen.



Graph



Baum

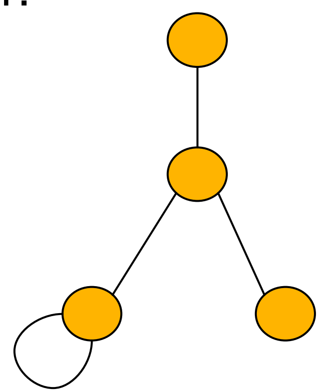
Allgemeiner Baum

Der Graph $G = (V,E)$ ist ein **Baum** genau dann wenn

1. G ist schleifenfrei
2. G enthält keinen kanteneinfachen Kreis
3. G ist zusammenhängend

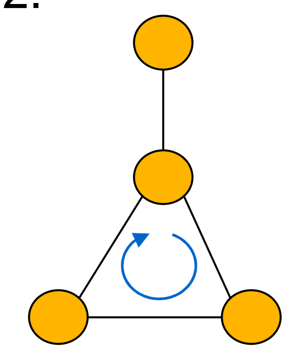
Gegenbeispiele:

1.



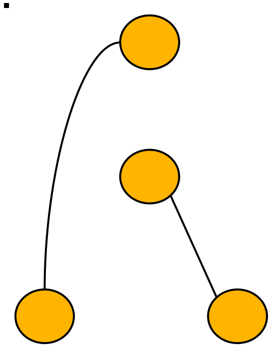
Schleife

2.



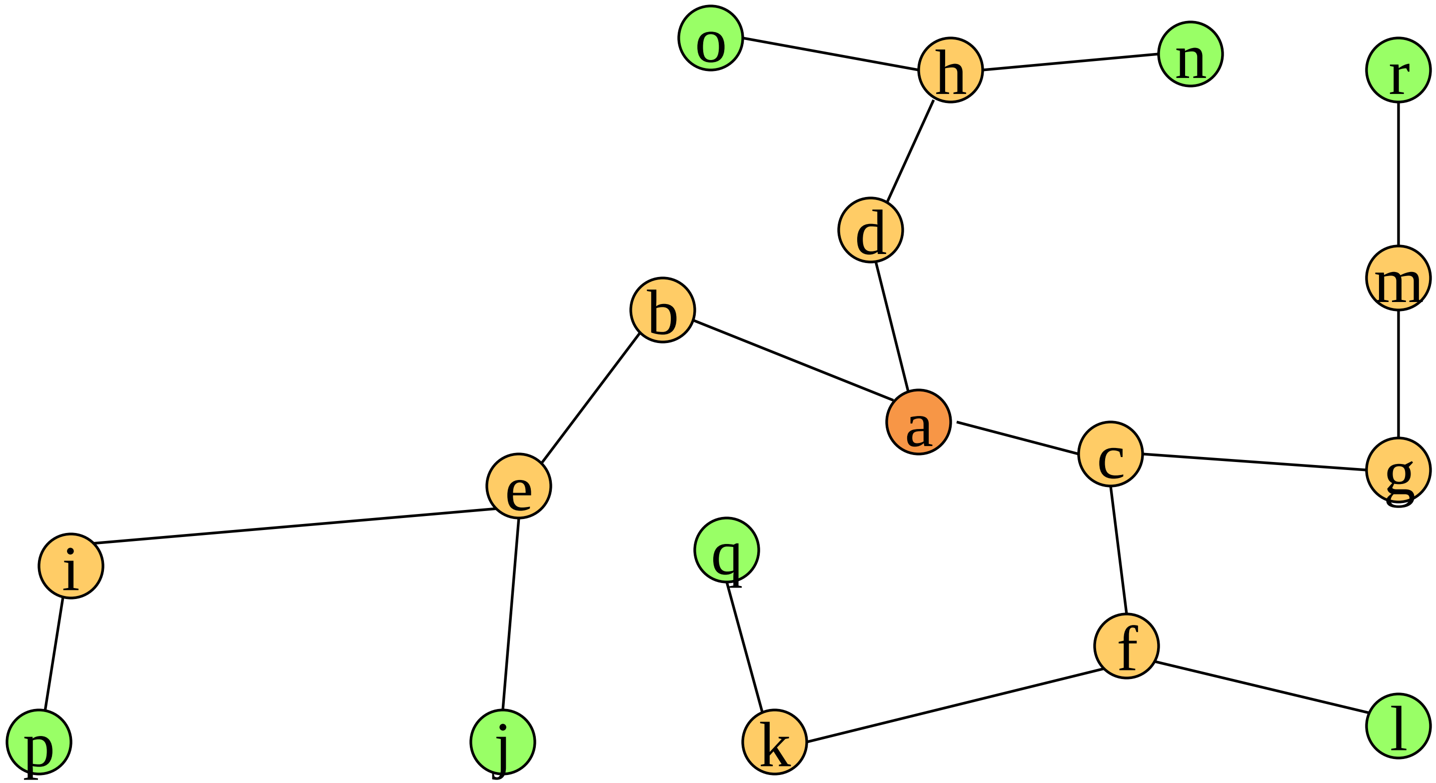
Kreis

3.

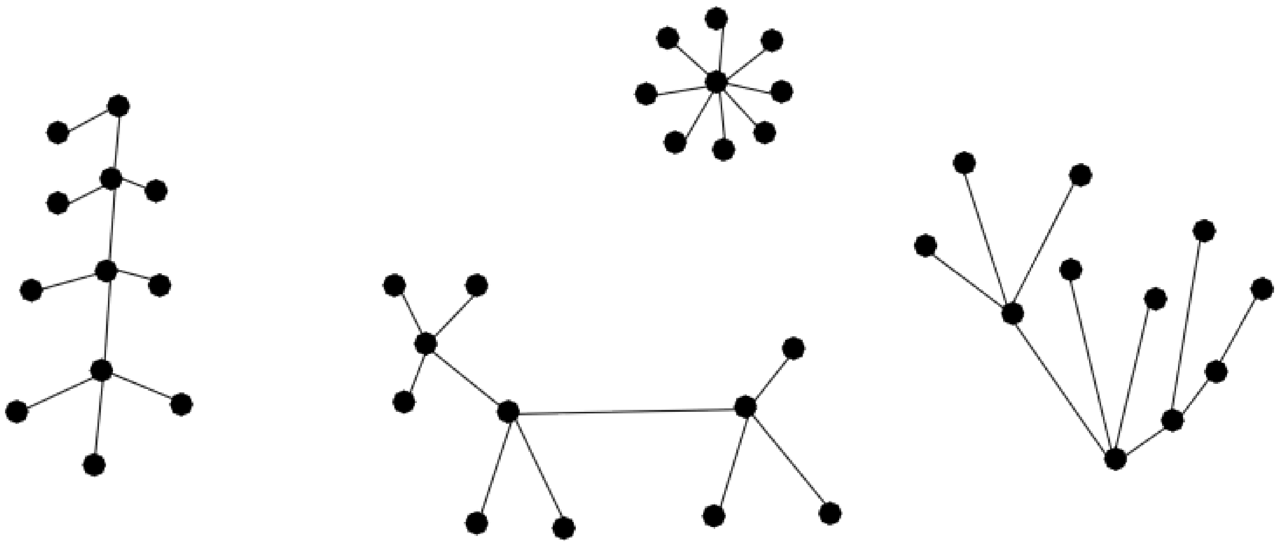


nicht zusammenhängend

Baum



Wald, der aus Bäumen besteht.

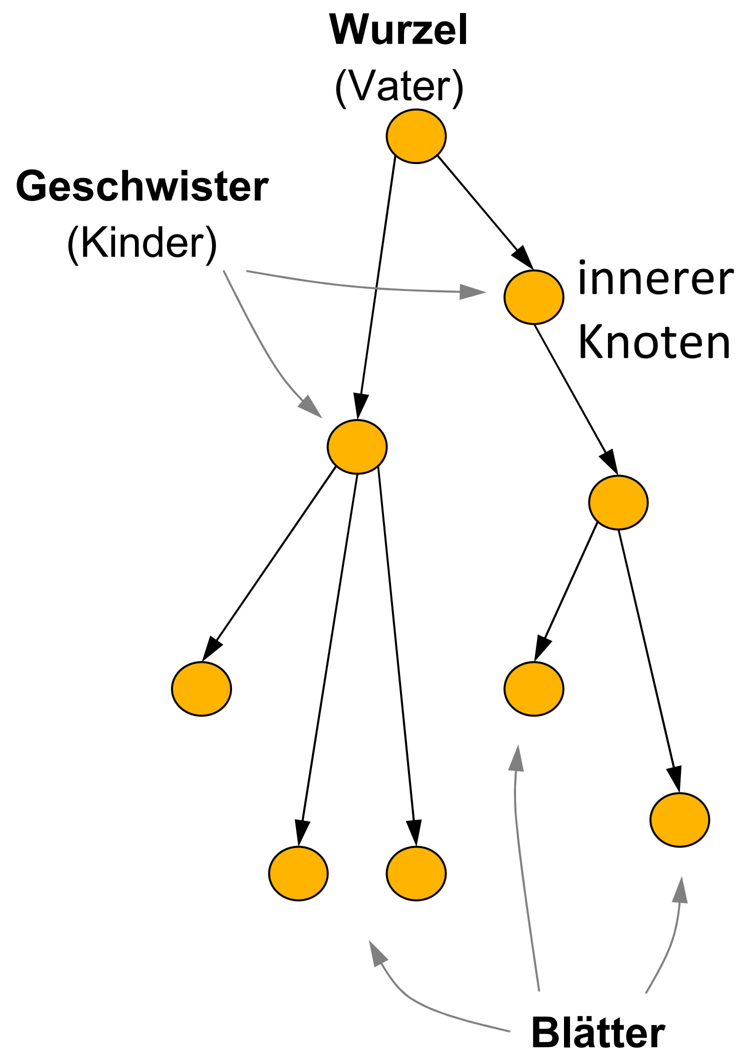


Baum - Begriffe

Sei ***T* = (*V*,*E*)** ein Baum.

- Die Nachfolger eines Knoten ***v*** werden auch **Kinder**, **Söhne** von ***v*** genannt.
- Der Vorgänger eines Knoten *v* wird auch **Vater** von *v* genannt.

- Ein Knoten heißt **Wurzel** des Baums, wenn er keinen Vater hat.
- Ein Knoten, der keinen Kinder besitzt, wird **Blatt** oder **leaf** genannt.
- Knoten werden **Geschwister** genannt, wenn sie denselben Vater besitzen.
- Ein Knoten, der nicht Wurzel oder Blatt ist, wird **innerer Knoten** genannt.



Sei $\boldsymbol{T = (V,E)}$ ein Baum mit der Wurzel v_0.

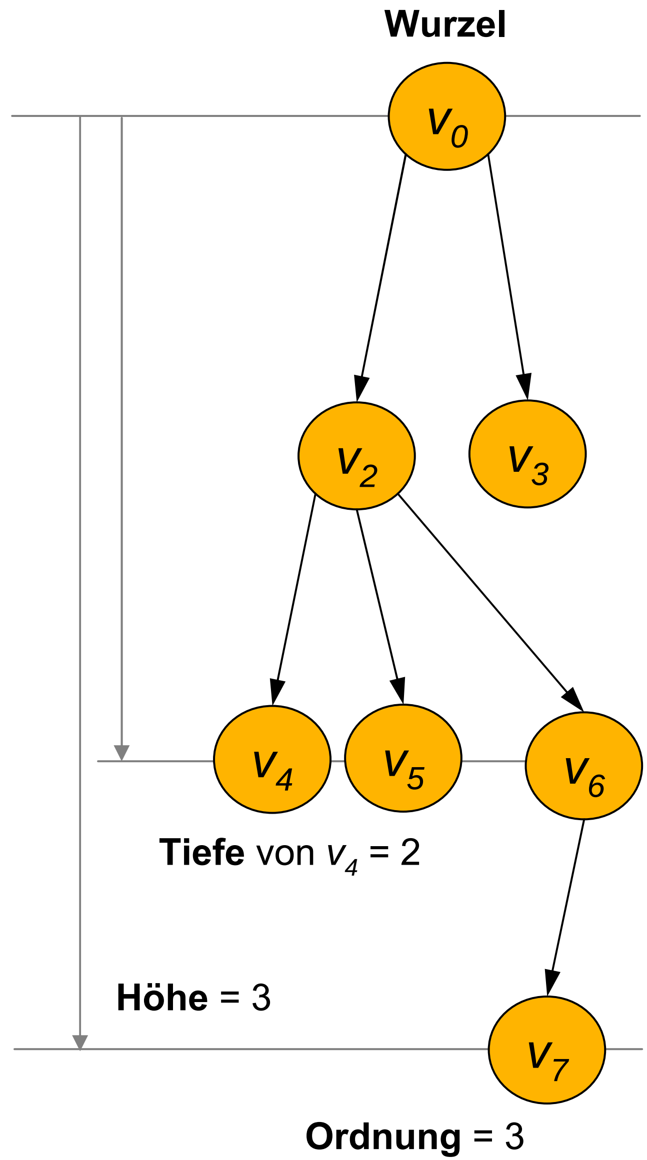
- **Tiefe eines Knoten** v_n
  = Länge des Pfades $\pi = (v_0, \ldots, v_n)$
  = $|\pi| = |(v_0, \ldots, v_n)|$
  = Abstand von der Wurzel
- **Höhe eines Baums**
  = maximale Tiefe
- T hat die **Ordnung** d
  = Der Verzweigungsgrad $d(T)$
  = Jeder Knoten aus T hat maximal d Kinder

Bezeichnung:

d-närer Baum

z.B.: d = 2: binärer Baum

d = 3: ternärer Baum

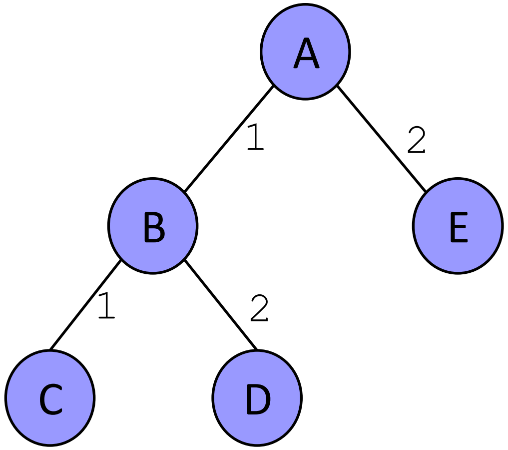


Wurzelbaum

Im Bild eines Wurzelbaumes wird die Wurzel in der Regel oben angeordnet, und die Wege werden von der Wurzel weggerichtet betrachtet.

- Wurzelbäume dienen zur graphischen Darstellung hierarchischer Strukturen,

  z.B. Vererbungen, Stammbäume, grammatikalische Strukturen usw.



Wurzelbaum

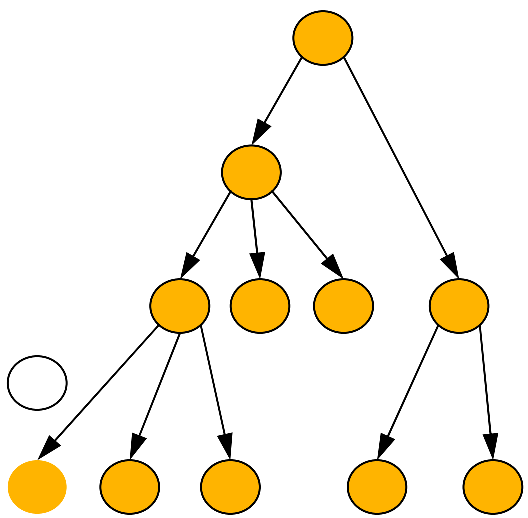
Da es in einem Baum zwischen je zwei Knoten genau einen Pfad gibt, gibt es in einem Wurzelbaum von jedem Knoten genau einen Pfad zur Wurzel.

Vom allgemeinen Baum zum Binärbaum

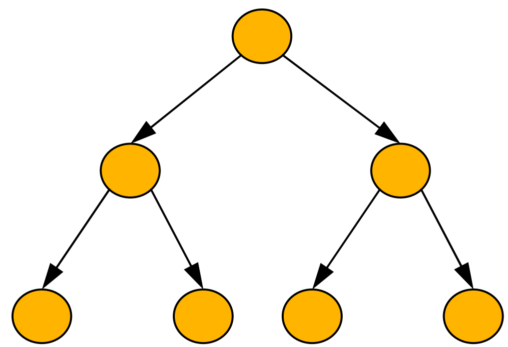
Ein Binärbaum stellt einen speziellen Fall des allgemeinen Baums dar.

binär = zwei, paarweise, aus zwei Grundeinheiten bestehend

Die Struktur eines Binärbaums und die Operationen auf ihn lassen sich durch seine Eigenschaften besonders einfach im digitalen Rechner realisieren.



Allgemeiner Baum



Binärbaum

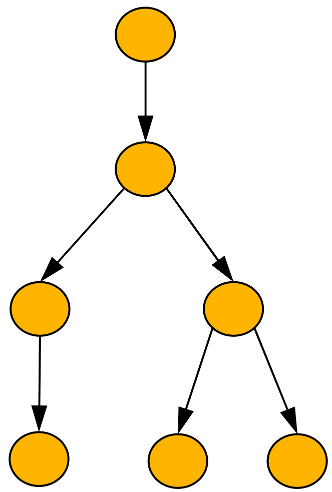
Binärer Baum

Der Baum ***T* = (*V*,*E*)** ist ein **Binärbaum** genau dann,wenn der Verzweigungsgrad $d(T) \leq 2$

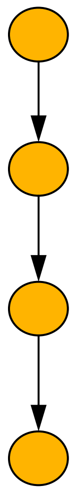
Das heißt, jeder Knoten aus T besitzt maximal 2 Kind-Knoten.

Beispiele:

1.



2.



Liste

Binärer Baum - Operationen

Vollständiges Auslesen

- Traversierung aller Knoten in bestimmter Reihenfolge.

Baumorganisation

- Aufspalten eines Baumes in Teilbäume

- Zusammenfügen mehrerer Bäume zu einem neuen Baum

Datenzugriff

- Einfügen
- Entfernen
- Suchen/Abfragen

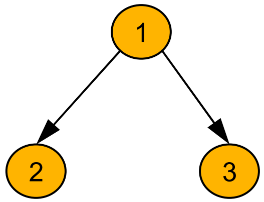
Binärer Baum - Beispiel einer Traversierung

Als **Traversierungsverfahren** bezeichnet man Verfahren, die jeden Knoten eines baumförmigen Graphen genau einmal besuchen. Im Zusammenhang mit binären Bäumen spricht man auch von einer **Linearisierung**.

Gängige Traversierungsstrategien:

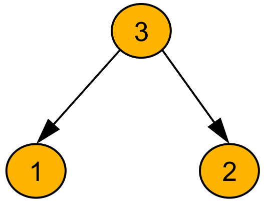
Hauptreihenfolge (*preorder*):

„**W**LR" - Wurzel, linker Teilbaum, rechter Teilbaum



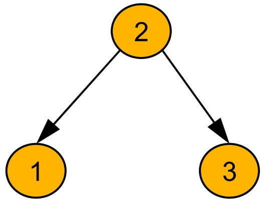
Nebenreihenfolge (*postorder*):

„LR**W**" - Linker Teilbaum, rechter Teilbaum, Wurzel



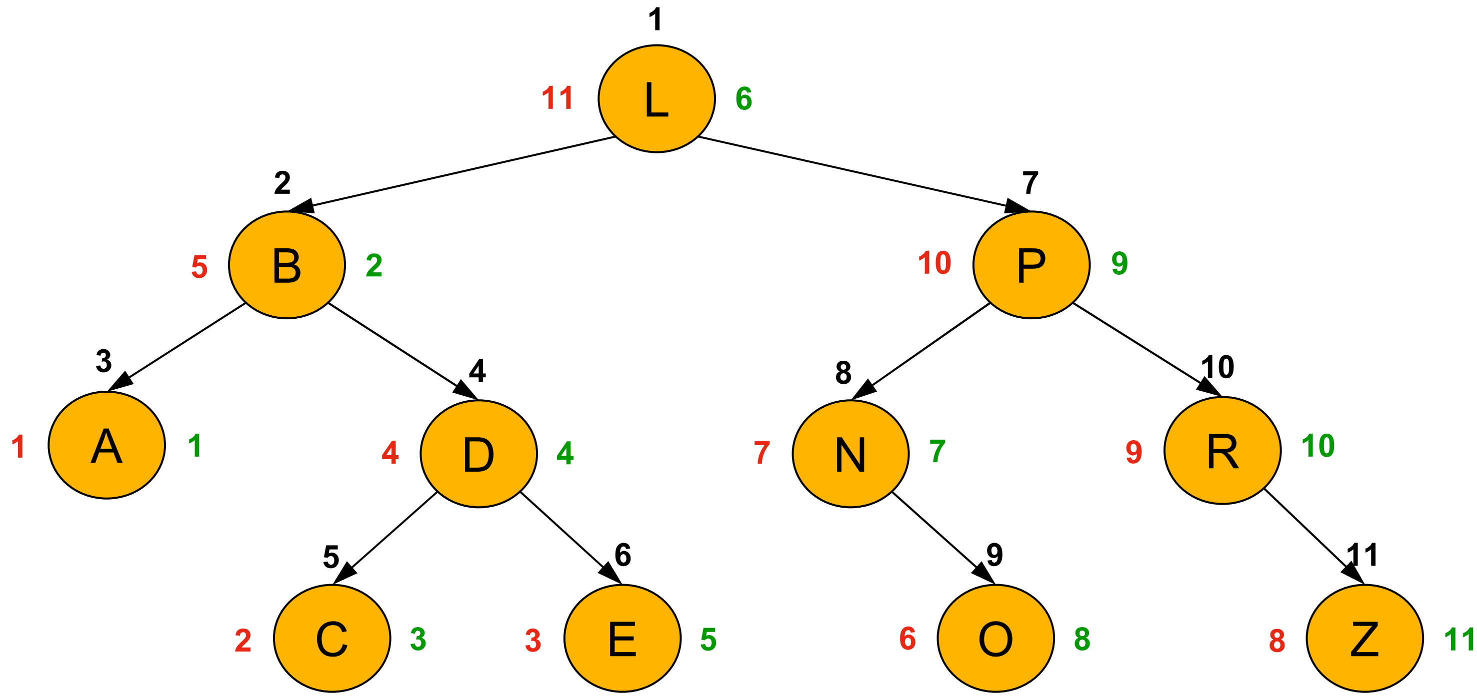
Symmetrische Reihenfolge (*inorder*):

„L**W**R" - Linker Teilbaum, Wurzel, rechter Teilbaum



Video

Binärer Baum - Beispiel einer Traversierung



Preorder „**W**LR“ liefert L, B, A, D, C, E, P, N, O, R, Z

Postorder „LR**W**“ liefert A, C, E, D, B, O, N, Z, R, P, L

Inorder „L**W**R“ liefert A, B, C, D, E, L, N, O, P, R, Z

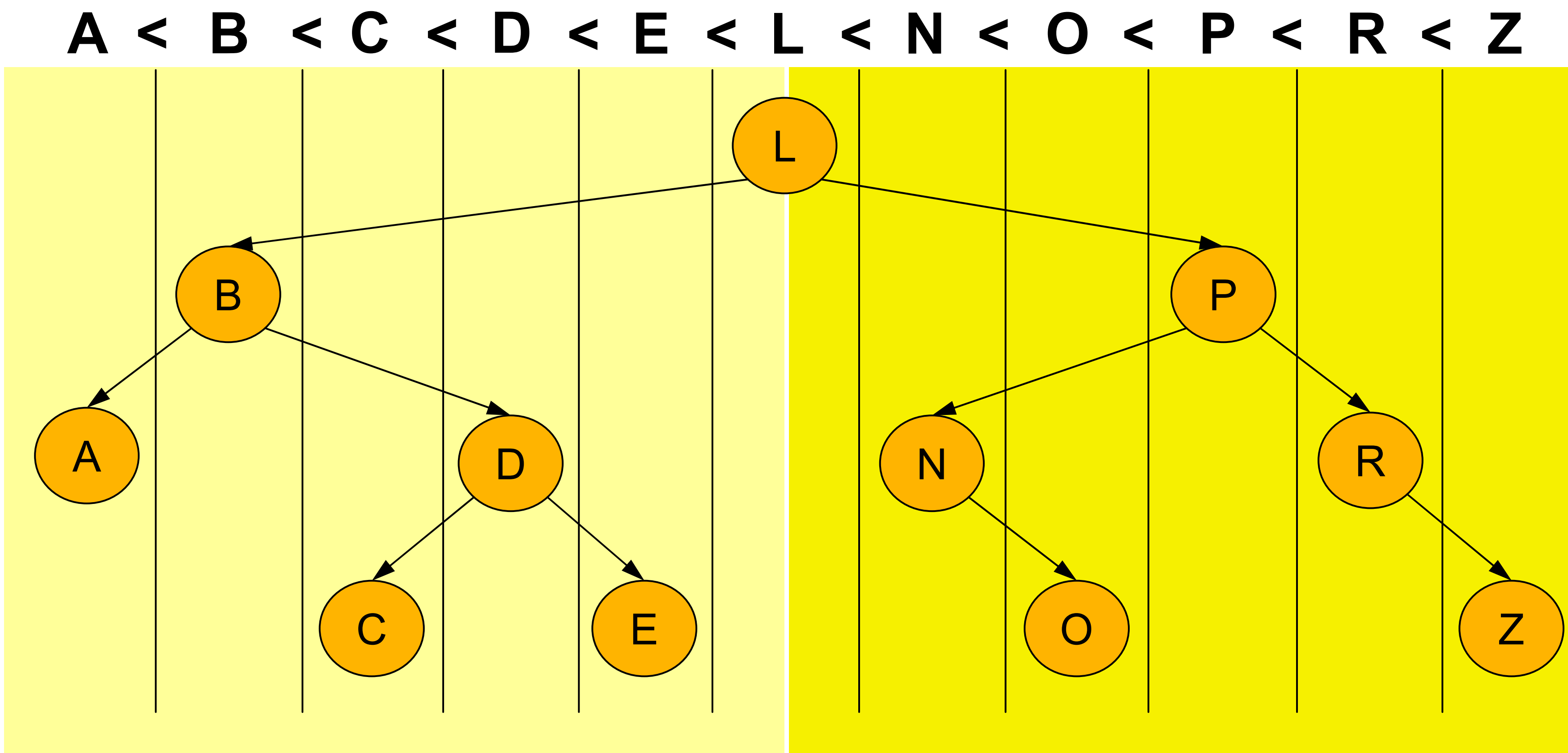
Binärer Suchbaum

Ein **binärer Suchbaum** ist ein binärer Baum, in dem alle
Knoten mit Hilfe eines Vergleichoperators (zum Beispiel „<“) geordnet sind.

Eigenschaften:

- Ein binärer Suchbaum enthält **keine gleichen Elemente**.
- Ein binärer Suchbaum ist **balanciert,** wenn jeder Knoten (mit Ausnahme der Blattknoten) **genau zwei Nachfolger** hat.
- In einem balancierten Suchbaum müssen die Operationen „Einfügen“ und „Löschen“ **die Ordnung erhalten.**
- Die *Inorder* -Traversierung liefert für binäre Suchbäume eine entsprechend dem Vergleichsoperator **sortiere Reihenfolge**.

Binärer Suchbaum



- Die Werte der Nutzdaten aller **Knoten eines linken Teilbaums sind kleiner** als seine Wurzel.
- Die Werte der Nutzdaten aller **Knoten eines rechten Teilbaums sind größer** als seine Wurzel.

Spannbaum

Eigenschaften von Bäumen

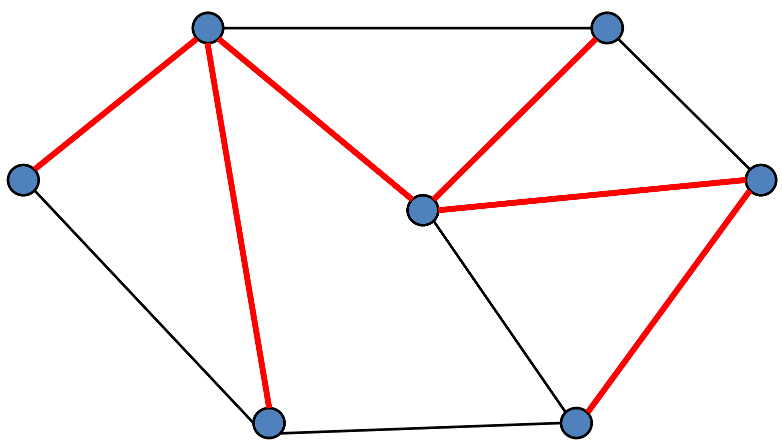
Satz: Jeder zusammenhängende Graph G =(V, E) enthält mindestens einen Spannbaum.

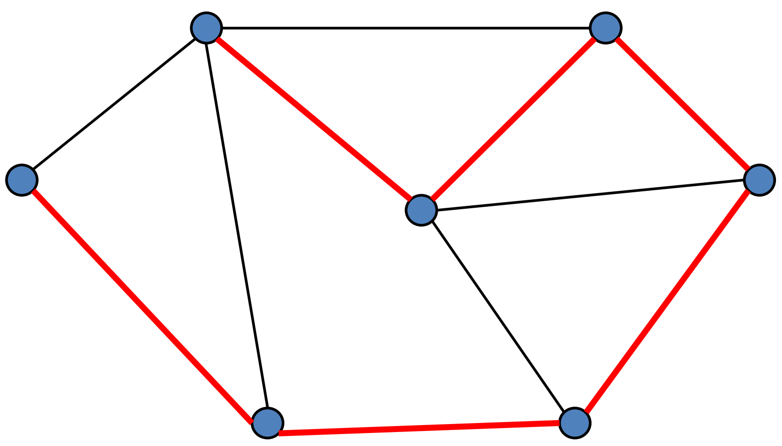
Minimaler Spannbaum - Prim-Algorithmus

Minimaler Spannbaum - Kruskal-Algorithmus

Definition:

Ein Teilgraph T = (V´,E´) von G = (V,E) heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum und V´= V.





Spannbäume

Frage:

Wie viele aufspannende Bäume hat ein Graph?

Satz:

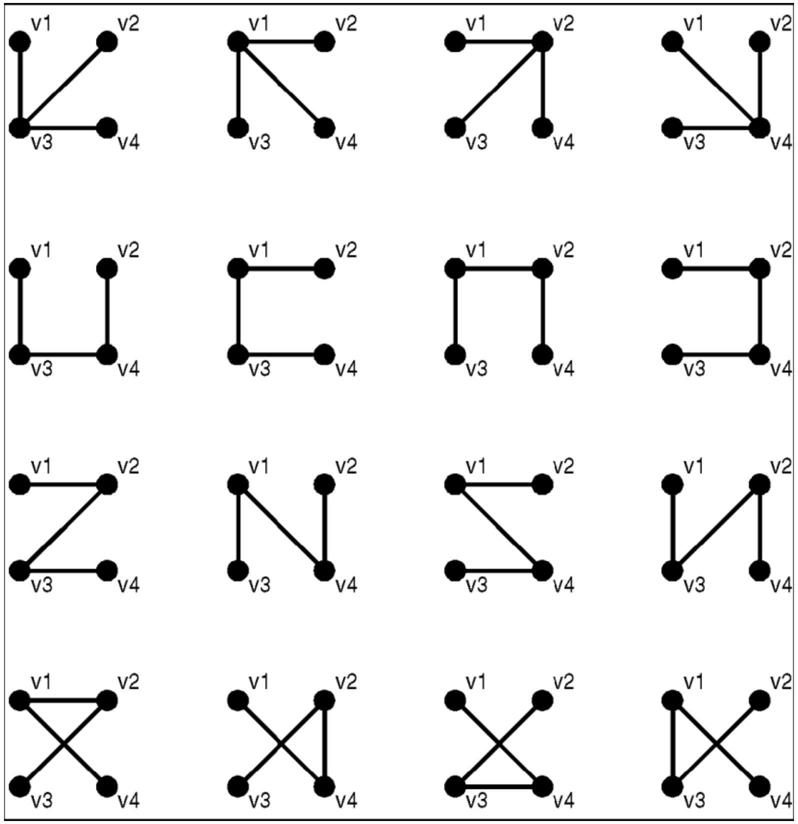
Für vollständige Graphen auf $\{1,2,\dots,n\}$ gilt:

Die Anzahl aufspannender Bäume ist $t(n) = n^{n-2}$

(Achtung: die Knoten sind unterscheidbar!)

Spannbäume des K_4

$n = 4$



Binärbaum

- Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens 2 unmittelbare Nachfolger hat.
- Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem jeder innere Knoten genau zwei unmittelbare Nachfolger hat und alle Blätter denselben Abstand zur Wurzel haben.

Video

Suchbaum

Ein Suchbaum ist ein Binärbaum, bei dem die (direkten) Nachfolger eines Knoten geordnet sind.

- Die Knotenmenge ist eine linear geordnete Menge
- Für alle inneren Knoten v gilt:
  - Für alle Knoten u im linken Unterbaum von v gilt: $u < v$
  - Für alle Knoten u im rechten Unterbaum von v gilt: $u \geq v$

Video

Binärbaum